

基于同步方法的观测器设计*

解玲丽¹, 周毅²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 中山大学中山医学院, 广东 广州 510080)

摘要: 基于 ODE 系统的混沌同步方法, 用惯性流形方法和自适应控制方法研究观测器的设计。对于参数确定系统, 构造的观测器是全局的, 初值可以任意选取, 而且所得结果对于初值敏感的混沌系统依然适用; 对于参数未知系统, 构造的观测器只是局部的。作为示例, 为蔡氏电路 (Chua's Circuit) 和未知参数的 Lorenz 系统分别设计了观测器, 并进行了模拟和仿真实验。

关键词: 观测器; 混沌同步方法; 自适应控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 05-0005-06

考虑光滑的非线性动力系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), x(0) = x^0 \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^p$ 。这里 $y(t)$ 是系统 (1) 的输出。不失一般性地, 假设 $f(0) = 0$ 且 $h(0) = 0$ 。

为了估计系统 (1) 当前状态 $x(t)$, 希望构造一个观测器如下:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y), \hat{x}(0) = \hat{x}^0$$

使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 趋于 0。

文 [1] 中总结了两种观测器的构造方法。下面主要介绍一下这两种构造方法。

第一种方法: 设

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx \\ y &= Hx\end{aligned}\quad (3)$$

是系统 (1) 在 $x=0$ 点处的线性化系统, 其中

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(0), H = \frac{\partial h}{\partial x}(0)$$

对于线性化系统研究, 通常假设该系统是能观的 (observable) 或者是可探测的 (detectable)。

线性系统 (3) 是能观的是指通过适当的选取 B 使得矩阵 $F+BH$ 的谱可以任意布满整个复平面。

线性系统 (3) 是可探测的是指通过适当的选择 B 使得矩阵 $F+BH$ 的谱在左半开平面内。

从以上可以看出, 能观性意味着可探测, 但是反之不成立。

当线性系统 (3) 是可探测的, 可选取矩阵 B 使得 $F+BH$ 的谱在开左半平面内, 然后构造观测器如下:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) - B(y - \hat{y}), \hat{x}(0) = \hat{x}^0 \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\quad (4)$$

于是, 系统 (3) 和系统 (4) 的误差系统为:

$$\dot{e} = (F+BH)e + O(e)O(x, e)\quad (5)$$

当 $x(t)$ 取值在 $x=0$ 附近并且 $e(0)$ 比较小时, 可以证明 $e(t)$ 趋于 0。

第二种方法: 对于线性部分是能观的系统 (1) 的观测器的构造, Kazantzis 等^[2]提出了一种改进的方法。这种方法的关键在于寻求一个局部的坐标变换 $z = \theta(x)$, 将系统 (1) 转化为一个线性系统加上一个关于输出的映射函数, 具体形式如下:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az - \beta(y) \\ y &= \bar{h}(z) = h(\theta^{-1}(z))\end{aligned}\quad (6)$$

其中, 矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 而且 θ 满足 $\theta(0) = 0$, 并在 $x=0$ 附近是局部同胚映射。在新的坐标 z 下, 对于系统 (6) 很容易构造一个观测器:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A\hat{z} - \beta(y) \\ \hat{x} &= \theta^{-1}(\hat{z})\end{aligned}\quad (7)$$

其中, 误差 $e = z - \hat{z}$ 所形成的系统 $\dot{e} = Ae$ 是线性的且是指数稳定的。于是, 所构造的观测器在原坐标

* 收稿日期: 2008-04-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671213); 中山大学青年教师科研启动基金资助项目 (2007-34000-3171913)

作者简介: 解玲丽 (1979 年生), 女, 讲师; 通讯联系人: 周毅; E-mail: zhouyi@mail.sysu.edu.cn

下是:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}(\hat{x}) \right)^{-1} (\beta(y) - \beta(h(\hat{x}))) \quad (8)$$

文 [3] 中指出, $z = \theta(x)$ 将系统 (1) 变换为系统 (6), 当且仅当 θ 满足一阶的 PDE 方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} f(x) = A\theta(x) - \beta(y) \quad (9)$$

在文 [1] 中讨论了 (9) 有幂级数解的条件, 并且指出对于构造局部的观测器一个有限序列就足够了。特别地, 这些结果甚至包括了系统 (1) 的线性部分是非能观的情形。

关于以上结果, 可以注意到: ① 这些观测器都是局部观测器, 因为 H, F 和 θ 都定义在 $x=0$ 附近; ② x^0 和 $\hat{x}^0$ 均被要求足够小。

近来, 很多文献在能观性理论的基础上^[4-5], 对主从系统的混沌同步问题展开研究, 其中也包括混沌系统。具体地说, 系统 (4) 可以被看作是带有输出反馈控制的、主系统 (1) 的从系统。

本文提出基于混沌同步理论来研究观测器的设计, 还将说明对于参数确定系统构造的观测器是全局的, 初值 x^0 和 $\hat{x}^0$ 可以任意选取, 所得结果对于初值敏感的混沌系统依然适用。另外, 本文还运用自适应控制方法, 为未知参数的系统设计了局部观测器。下面, 将从观测器设计的角度来重述一下用惯性流形和自适应控制方法。

1 从观测器设计角度看用惯性流形研究同步的方法

考虑连续系统, 也包括混沌系统, 如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + f_1(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$, A_1 是一个 $n \times n$ 矩阵, f_1 满足适当的条件使得系统 (10) 在 $[0, \infty)$ 上有全局的连续可微解, $y \in \mathbf{R}^p$ 是系统的输出。

带输出反馈控制 u 的系统 (10) 的观测器为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_2 \hat{x} + f_2(\hat{x}) + u(y, \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$, A_2 是一个 $n \times n$ 矩阵, f_2 和 u 满足适当的条件使得系统 (11) 在 $[0, \infty)$ 上有全局的连续可微解, $\hat{y} \in \mathbf{R}^p$ 系统的输出。

从同步的角度看, 系统 (10) 和系统 (11) 形成了耦合主从系统, u 可以看作是控制函数, 它将主系统的信息传递给从系统。

令 $g(x, \hat{x}) := u(y, \hat{y}) = u(h(x), h(\hat{x}))$, 于是系统 (11) 可以写为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_2 \hat{x} + f_2(\hat{x}) + g(x, \hat{x}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \end{aligned} \quad (12)$$

下面将用惯性流形理论来分析这个主从同步问题。

耦合系统 (11) 和 (13) 有正的不变流形的充分必要条件是: $\hat{x} = \varphi(x)$ ($\varphi \in C^1$) 满足 $\dot{\hat{x}} = (D\varphi(x))\dot{x}$ (参看文 [6])。

由 (10) 和 (12) 得到: 如果 g 满足

$$g(x, \varphi(x)) = D\varphi(x)(A_1 x + f_1(x)) - A_2 \varphi(x) - f_2(\varphi(x)) \quad (13)$$

那么 $\mathcal{M} = \text{graph } \varphi$ 就是由 (14) 所决定的 n 维正不变流形。

假设以下条件成立:

$$\begin{aligned} (H_1) \quad & \|f_2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) - f_2(\hat{x}_1)\| \leq c_1 \|\hat{x}_2\|, \\ & \forall \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (14)$$

(H₂) 对每个 $x \in \mathbf{R}^n$, g 关于 $\hat{x}$ 是可微的, 即 u 关于 $\hat{y}$ 是可微的, $\hat{y}$ 关于 $\hat{x}$ 是可微的, 而且

$$g(x, \hat{x}_1 + \hat{x}_2) - g(x, \hat{x}_1) = (D_{\hat{x}} g(x, \hat{x}_1)) \hat{x}_2 + v(x, \hat{x}_2) \quad (15)$$

其中 v 和 $D_{\hat{x}} g(x, \hat{x}_1)$ 关于 x 和 $\hat{x}_1$ 一致满足不等式:

$$\begin{aligned} \langle v(x, \hat{x}), \hat{x} \rangle &\leq c_2 \|\hat{x}\|^2 \\ \langle (A_2 + D_{\hat{x}} g(x, x_1)) \hat{x}, \hat{x} \rangle &\leq -c_3 \|\hat{x}\|^2, c_3 > c_1 + c_2 \end{aligned} \quad (16)$$

这里,

$$D_{\hat{x}} g(x, \hat{x}_1) = D_{\hat{y}} u(y, \hat{y}) \cdot D_{\hat{x}}(h(\hat{x})) \quad (17)$$

定理 1 设 (H₁) 和 (H₂) 成立, 而且 (14) 也满足, 那么, 同步流形 $\mathcal{M}$ 指数吸引主从系统所有解的轨道, 其中指数为 $\beta = 2(c_3 - c_1 - c_2)$ 。

证明 参见 [7] 定理 1 的证明。

注 1 由定理 1 知道, 当 (H₁) 和 (H₂) 成立, 如果 g 和 φ 满足 (14), 那么 $\hat{x} = \varphi(x)$ 就是主从系统 (10) 和 (12) 的广义同步流形。显然, 这个同步流形是指数渐进稳定的。特别地, 如果 $\varphi(x)$ 可以取作 $\varphi(x) = x$, 那么主从系统 (10) 和 (12) 就达到完全同步。

于是有这样的问題: 什么条件保证了函数 $\varphi(x)$ (广义同步流形) 和函数 g 的存在性? 且其中函数 $\varphi(x)$ 和 g 满足 (14)

$$\text{设 } z = (x_1, \dots, x_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T = (z^1, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n})^T, \text{ 且 } \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & A_2 \end{pmatrix}.$$

假设 $-A_1$ 和 $-A_2$ 各自的特征值分别是 $\lambda_{11} \leq \lambda_{12} \leq \dots \leq \lambda_{1n}$ 和 $\lambda_{21} \leq \lambda_{22} \leq \dots \leq \lambda_{2n}$ 。 $-A_1$ 相应的特征函数是 $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n}$ 。

设 $E_1 = \text{span}\{\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n}\} = \mathbf{R}^n \circ E_1 = PE$, $E_2 = QE = (I - P)E$, 其中 $E = \mathbf{R}^{2n}$ 。则 $z = x + \hat{x} = Pz + Qz \in E_1 \oplus E_2 = E$ 。其中, $+$ 是指元素的直和, 而 $\oplus$ 是指集合的直和。令

$g(x, \hat{x}) = -k\hat{x} + g_1(x, \hat{x}), \bar{G}(z) = (0, \bar{g}(z))^T$, 其中, $\bar{g}(z) = Q(-kz) + g_1(Pz + Qz)$, 且 k 是一个正常数。又记 $F(z) = (\bar{f}_1(z), \bar{f}_2(z))^T$, 其中 $\bar{f}_1(z) = f_1(Pz)$ 和 $\bar{f}_2(z) = f_2(Qz)$ 于是, 耦合系统 (10) 和 (12) 等价于以下系统:

$$\dot{z} = Az + F(z) + G(z) \quad (18)$$

其中 $G(z) = \bar{G}(z) + \begin{pmatrix} 0 \\ Qkz \end{pmatrix}$ 和 $Az = \bar{A}z - \begin{pmatrix} 0 \\ Qkz \end{pmatrix}$ 。

应用 [8] 中的主要结果, 得到以下定理:

定理 2 假设 (H_1) 及以下 3 个条件成立

$$(i) \|f_2(x_1 + x_2) - f_2(x_1)\| \leq c'_1 \|\hat{x}_2\| \quad (19)$$

$$(ii) \|g_1(Pz_1, Qz_2) - g_1(Pz_1, Qz_1)\| \leq c'_2 \|z_2 - z_1\| \quad (20)$$

(iii) 存在常数 k 使得

$$k + \lambda_{21} > \lambda_{1n} + 2l, -k + \lambda_{21} > l \quad (21)$$

其中, $l = c_1 + c'_1 + c'_2$ 。

那么, 耦合系统 (10) 和 (12) 有全局指数吸引所有解的广义同步流形 $\mathcal{M}$, 指数为 $r = k + \lambda_{21} - l$ 。

注 2 定理 2 指出, 若适当选取 g 使得定理的条件得到满足, 那么这样的全局指数吸引所有解的同步流形总是存在的。该同步流形就是惯性流形。

应用定理 2 于恒同情况, 即 $A: = A_1 = A_2$, 且 $f_1 = f_2$, 得到以下推论:

推论 1 当 $A: = A_1 = A_2$ 且 $f_1 = f_2$ 时, 如果条件 (H_1) , (19) 和 (20) 成立, 并且 $k > c_1 + \|A\|$, 那么主从系统 (10) 和 (11) 有全局指数吸引所有解的完全同步流形 $\mathcal{M} = (x, x)$, 指数为 $\beta = 2(k - c_1 - \|A\|)$ 。

注 3 主从系统 (10) 和 (11) 的完全同步流形的存在性意味着系统 (11) 是系统 (10) 的全局观测器。

在文 [9] 和 [10] 中, 自适应性控制方法被用来解决带有未知参数的混沌同步问题。

考虑以下混沌主系统:

$$\dot{x} = f(x, p) \quad (22)$$

其中, $y = h(x) = x_i (i \in \{1, \dots, n\})$ 表示输出, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ 且 $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k$ 。假设 $p_l (l \in \{1, \dots, k\})$ 是未知的, q_l 是对应于未知参数 p_l 的初始值。

从系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = f(\hat{x}, p_j, q_l) \\ \dot{\hat{x}}_s = f_s(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n, p_j, q_l) \end{cases} \quad (23)$$

其中, $s \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$, $p_j = q_l$, $j = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, k$ 。

q_l 的自适应率由下式给出

$$\dot{q}_l = -\delta(\hat{x}_i - x_i) \frac{\partial f_i}{\partial q_l} \quad (24)$$

其中,

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_j} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial q_l} \quad (25)$$

这里的 q_l 在 f_i 中可以显式表达, 而且 $\hat{x}_j$ 在 f_i 中也可以显式表达。

令 $q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^k$, 且

$$z = \hat{x} - x = (z_1, \dots, z_n, q_l - p_l) = (\hat{x}_1 - x_1, \dots, \hat{x}_n - x_n, q_l - p_l)$$

由 (22) 和 (23) 得到的方程为 $\dot{z} = g(z)$ 。

设 J 是该方程在平衡点处的 Jacobi 矩阵, 于是得到以下定理^[10]。

定理 3 设 $\lambda_i (i = 1, \dots, n+1)$ 是 J 的特征值, 如果存在 δ 使得对所有的 i , λ_i 的实部是负的, 那么, 主从系统 (22) 和 (23) 在适应率 (24) 下达到完全同步, 并且 $q_l \rightarrow p_l$ 。

以上提到的混沌同步的研究方法都将用到下面观测器的设计中。

2 观测器设计

这一部分将应用上面介绍的方法针对 Lur'e 系统和 Lorenz 系统来研究观测器设计。

2.1 Lur'e 系统的观测器

考虑以下 Lur'e 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\sigma(C^T x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足扇形条件, $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是矩阵。

系统 (26) 的观测器可以设计为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\sigma(C^T \hat{x}) + u(y, \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \end{aligned} \quad (27)$$

注意到对于主从系统 (26) 和 (27), (H_1) 成立。然而 (H_2) , (19) 和 (20) 都依赖于 h 。因此, 对于不同的函数 h , 处理问题要使用不同的方法和结果。对于不同的 h 我们将分两种情形展开讨论。

首先考虑典型的 Lur'e 系统——蔡氏电路 (Chua's circuit) 如 (26) 所示, 其中参数为:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -am_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -b & \gamma \end{pmatrix} \\ B\sigma(C^T x) &= \begin{pmatrix} a(m_1 - m_0)f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $a \geq 0, b \geq 0$ 且 $\gamma \geq 0, m_0$ 和 m_1 是常数, $f(x_1) = \frac{1}{2}(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$ 。容易验证 $f(x_1)$ 是关于 x_1 的 Lipschitz 连续函数, 且 Lipschitz 常数为 1。于是, 系统 (26) 的非线性项的 Lipschitz 常数为 $c_1 = a|m_1 - m_0|$ 。

情形 1: $y = h(x) = x_1 \in \mathbf{R}$

把系统 (26) 的全局观测器 (27) 中的 $u(\gamma, \hat{y})$ 取为 $K(\gamma - \hat{y})$, A 和 $B\sigma$ 由 (28) 给出, 即:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\sigma(C^T\hat{x}) + K(\gamma - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) = \hat{x}_1\end{aligned}\quad (29)$$

这里 $K \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$, 与 (12) 比较, 得到 $g(x, \hat{x}) = K(\gamma - \hat{y})$, 进一步, 由 (15), 推出

$$D_{\hat{x}}g(x, \hat{x}_1) = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v(x, \hat{x}_2) = 0$$

当参数 $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = -1/7, m_1 = 2/7$ 时, 系统 (26) 是混沌的 (如图 1)。为了满足 (16), 通过计算得到, 只需要 $k_i, i = 1, 2, 3$ 满足下面不等式:

$$\begin{aligned}am_0 + k_1 &> 0 \\ 4am_0 + 4k_1 - (a + 1 - k_2)^2 &> 0 \\ k_3^2 &< (am_0 + k_1)(1 - b)^2\end{aligned}\quad (30)$$

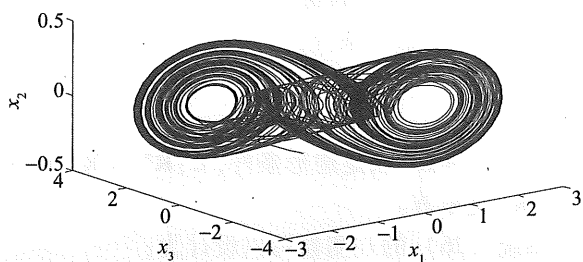


图 1 当参数为 $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = -1/7, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$ 时, 系统 (26) 是混沌的
Fig. 1 Chua's circuit is chaotic when $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = -1/7, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$

从以下的模拟 (如图 2) 中, 可以看到, 当 $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$ 使得 (30) 成立时, 全局观测器 (29) 可以跟踪到 A 和 $B\sigma$ 由 (28) 给出的系统 (26)。

情形 2: $y = h(x) = x_2 \in \mathbf{R}$

考虑参数为 $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = -1/7, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$ 时, A 和 $B\sigma$ 由 (28) 给出的系统 (26), 与情形 1 类似, 将全局观测器设计为:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\sigma(C^T\hat{x}) + K(\gamma - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) = \hat{x}_2\end{aligned}\quad (31)$$

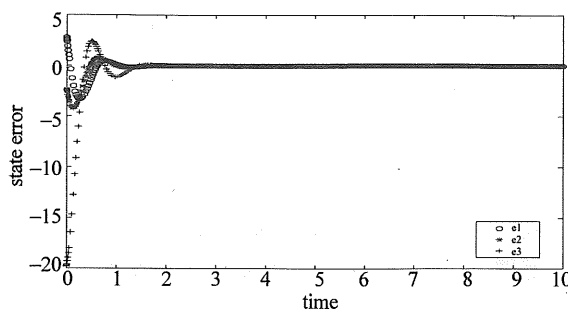


图 2 当 $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$ 时, 观测器 (29) 和系统 (26) 的状态误差

Fig. 2 The error between the responses of observer (29) and (26) when $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$

值得注意的是, 所得结果比 [11] 中使用变量替代法得到的结果要好。图 3 表明, 当 $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$ 时, 观测器 (31) 可以跟踪到 A 和 $B\sigma$ 由 (28) 表出时的系统 (26)。

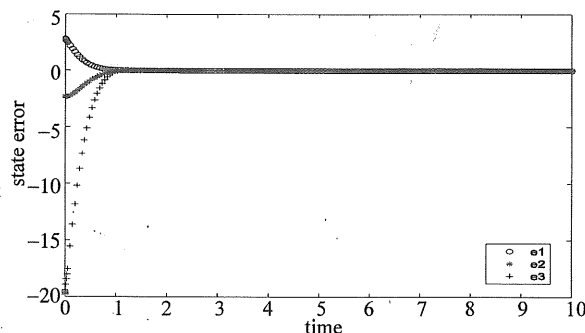


图 3 当 $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$ 时, 观测器 (31) 和系统 (26) 的状态误差

Fig. 3 The error between the responses of the observer (31) and (26) when $k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 4.5$

考虑另一组参数 $a = -45, b = 31.25, \gamma = 1.125, m_0 = -3.40, m_1 = 0.02, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$, 这时系统 (26) 不是混沌的 (见图 4)。

为了满足条件 (16), 通过计算知道 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 必须满足下面不等式:

$$\begin{aligned}am_0 &> 0 \\ 4am_0(1 + k_2) - (a - k_1 + 1)^2 &> 0 \\ (1 - b - k_3)^2 - \gamma(4am_0 + 4am_0k_2 - (a - k_1 + 1)^2) &< 0\end{aligned}\quad (32)$$

选取 $k_1 = -14, k_2 = 7, k_3 = -10$, 观测器 (31) 可以跟踪到 A 和 $B\sigma$ 由 (28) 表出时的系统 (26)。图 5 就验证了这一点。

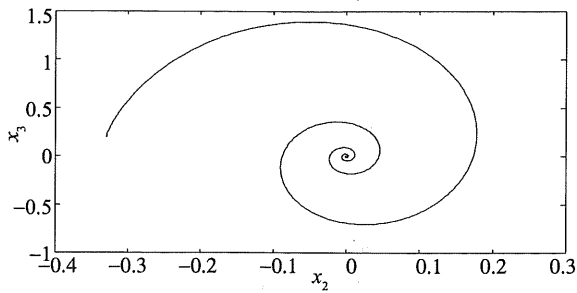


图4 当参数为 $a = -45, b = 31.25, \gamma = 1.125, m_0 = -3.40, m_1 = 0.02, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$ 时, 系统(26)不是混沌的

Fig. 4 Chua's circuit is not chaotic when $a = -45, b = 31.25, \gamma = 1.125, m_0 = -3.40, m_1 = 0.02, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$

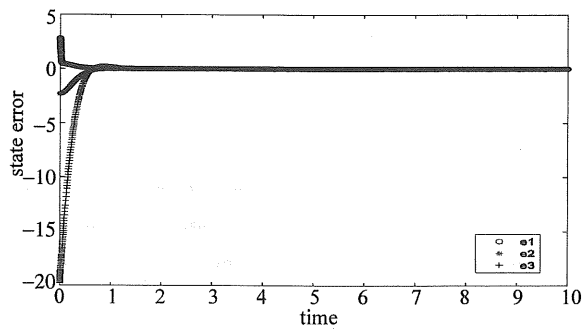


图5 当 $k_1 = -14, k_2 = 7, k_3 = -10$ 时, 观测器(31)和系统(26)的状态误差

Fig. 5 The error between the responses of the observer (31) and (26) when $k_1 = -14, k_2 = 7, k_3 = -10$

情形3: $y = h(x) = x_3 \in \mathbf{R}$

考虑参数为 $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = 1.2, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$ 时, A 和 $B\sigma$ 由(28)给出的系统(26), 这时系统不是混沌的, 如图6所示。

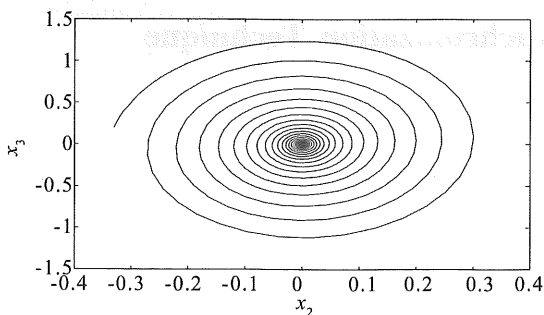


图6 当参数为 $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = 1.2, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$ 时, 系统(26)不是混沌的

Fig. 6 Chua's circuit is not chaotic when $a = 9, b = 14.28, \gamma = 0, m_0 = 1.2, m_1 = 2/7, x(0) = (-0.2, -0.33, 0.2)$

我们设计全局观测器为:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\sigma(C^T\hat{x}) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) = \hat{x}_3\end{aligned}\quad (33)$$

选取 $k_1 = 0, k_2 = -9, k_3 = 8$ 使得(16)成立, 如图7所示, 观测器(33)会跟踪到 A 和 $B\sigma$ 由(28)表出时的系统(26)。

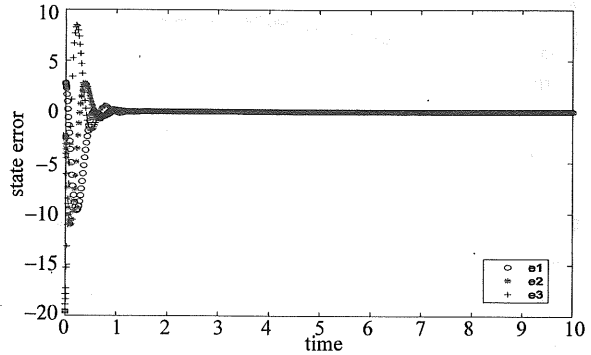


图7 当 $k_1 = 0, k_2 = -9, k_3 = 8$ 时, 观测器系统(33)和系统(26)的状态误差

Fig. 7 The error between the responses of observer (33) and (26) when $k_1 = 0, k_2 = -9, k_3 = 8$

2.2 带有未知参数的 Lorenz 系统的观测器

考虑 Lorenz 系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}\quad (34)$$

其中, 输出为 $y = h(x) = x_1, r$ 是未知参数。该系统当 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ 时, 系统(34)是混沌的。

由自适应控制方法和定理3, 系统(34)的观测器可设计为:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \sigma(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= r'\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_1\hat{x}_2 - b\hat{x}_3\end{aligned}\quad (35)$$

对应于(24), 自适应率为

$$\dot{r}'(t) = -\delta(\hat{x}_1 - x_1)\sigma x_1\quad (36)$$

令 $e = \hat{x} - x$, 那么对于方程 $\dot{e}(t) = g(e)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -x_1 & x_1 \\ 0 & x_1 & -b & 0 \\ -\delta\sigma x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选取初始向量为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [5, 5, 0.4]$ 和 $[\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0), \hat{x}_3(0)] = [4, -0.1, -2]$, 且因为混沌吸引子是有界的, 可选取 $r'(0)$

$= 7$ 。当 $\delta = 0.05$ 时, 对应矩阵的所有的特征值都有负实部, 由定理 3, (34) 的观测器就是 (35) 加上 (36)。可以从图 8 和 图 9 看到模拟的结果。

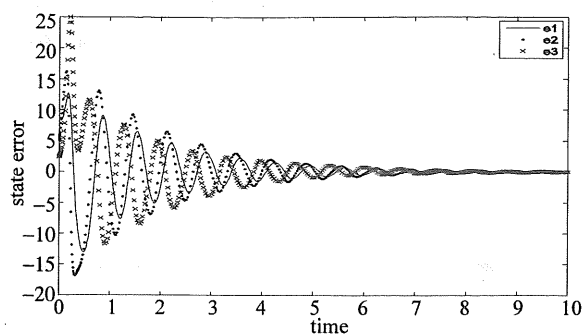


图 8 系统 (34) 与系统 (35) + (36) 的状态误差, 其中 $e_1 = x_1 - \hat{x}_1, e_2 = x_2 - \hat{x}_2, e_3 = x_3 - \hat{x}_3$

Fig. 8 The error of the state between system (35) and observer system (36) with (37), where $e_1 = x_1 - \hat{x}_1, e_2 = x_2 - \hat{x}_2, e_3 = x_3 - \hat{x}_3$

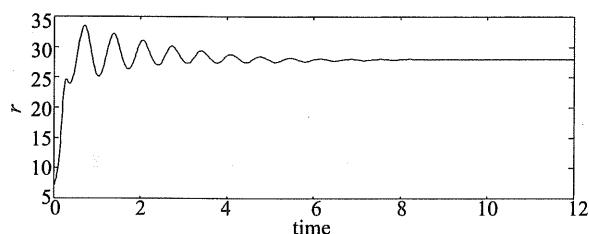


图 9 参数 r' 的自适应规律。

Fig. 9 Adaptive rule of parameter r'

参考文献:

- [1] KRENER A J, XIAO M. Observers for linearly unobservable nonlinear systems[J]. Systems Control Lett, 2002, 46:281 - 288.

- [2] KAZANTZIS N, KRAVARIS C. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem [J]. Systems Control Lett, 1998, 34:241 - 247.
- [3] KRENER A J, RESPOMDEK W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics [J]. SIAM J Control Optim, 1985, 23(2):197 - 216.
- [4] NIJMEIJER H, MAREELS I M Y. An observer looks at synchronization [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I, 1997, 44(10):882 - 890.
- [5] ZEMOUCHE A, BOUTAYEB M. Synchronization by observer based approach for a class of nonlinear chaotic systems [C]. 1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, Reims-France, 2006, 181 - 186.
- [6] SELL G R. An optimality condition for approximate inertial manifolds [J]. Contemporary Mathematics, 1995, 105:165 - 186.
- [7] XIE L L, TEO K L, ZHAO Y. Chaos synchronization for continuous chaotic systems by inertial manifold approach [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32(1):234 - 245.
- [8] ROMANOV A V. Sharp estimates of the dimension of inertial manifolds for nonlinear parabolic equations [J]. Russian Acad Sci Izv Math, 1994, 43(1):31 - 47.
- [9] LIU G G, ZHAO Y. Adaptive control on a class of uncertain chaotic systems [J]. Chinese Physics Letter, 2005, 22:1069 - 1071.
- [10] LIU G G, ZHAO Y. Synchronization on adaptive control of parameter uncertain chaotic systems [J]. J Circuits and Systems, 2005, 10:24 - 27.
- [11] WU X F, ZHAO Y, ZHOU S. Lag synchronization of chaotic Lur'e systems via replacing variables control [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2005, 15:617 - 635.

Observer Design Based On Some Synchronization Technique

XIE Ling-li¹, ZHOU Yi²

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Zhongshan School of Medicine, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510080, China)

Abstract: A method is proposed to study the observer design problem based on synchronization technique for ODE systems, which could be chaotic. Global observers are constructed for chaotic systems with linear output feedback, and local observers for systems with unknown parameters. For illustration, the proposed design method is applied to some systems, which can be chaotic, such as Chua's circuit and Lorenz system with unknown parameters.

Key words: observer; synchronization technique; adaptive control